# 374. Totale ナ線狀汎函數ノ集合ニツイテ

近藤　明久（東大學生）

平凡ナコトデスカラ既知ノ事カモ知レマセンガ。

Eヲ線狀D空間、$\bar{E}$ヲソノ共軛空間（*espace conjugué*）$A \subseteq \bar{E}$ナル任意ノ集合Aヲトリ、Aヲ含ム$\bar{E}$内ノ凡テノ一次超限閉集合（*transfiniment fermé*）ノ共通部分Tヲ假リニ超限閉被ト名ヅケレバ之レハAヲ含ム最小ノ一次超限閉集合デ且ツ，

（定理1）　Aガ *totale*（*Banach* ニヨル）ナルタメノ必充條件ハAノ超限閉被ガ$\bar{E}$ト一致スルコトデアル。

（証明）　$T \neq \bar{E}$ナラ　$f_0 \subset \bar{E}-T$ トスルト

$f_0(x_0) \neq 0$　$f \subset T$ ニツキ（即チ $f \subset A$ ニツキ）$f(x_0)=0$ ナル $x_0 \subset E$ ガアルカラ Aハ *totale* デナイ。

逆ニ凡テノ $f \subset A$ ニツキ $f(x_0)=0$ トスル。

Aノ一次被ヲ$\Gamma_1$; $\Gamma_1$ヲ$\Gamma$ノ超限導集合トスル、$\vartheta$ガ *nombre-limite* ノトキ $\Gamma_\vartheta = \sum_{\xi<\vartheta} \Gamma_\xi$

ソウデナイトキニハ $\Gamma_\vartheta = (\Gamma_{\vartheta-1})_1$ トスル。

$\Gamma$ガ一次集合ダカラ

$$\Gamma \subseteqq \Gamma_1 \subseteqq \Gamma_2 \subseteqq \cdots\cdots$$

$$\xi < \eta \text{ ノトキ } \quad \Gamma_\xi \subseteqq \Gamma_\eta$$

$\Gamma_\vartheta$ ハ一次集合デアル。

$\Gamma \subseteqq T$，超限閉集合ハ *reguliérement fermé* デアルコトカラ其ノ超限集積点ヲ含ム。

$$\therefore \quad \Gamma_\vartheta \subseteqq T$$

*Element* ノ増加ヲ考ヘレバ、アル$\eta$ニツキ $\Gamma_\eta = (\Gamma_\eta)_1$

$$\therefore \quad \Gamma_\eta = T$$

$x_0$ ハ A ト直交スルカラ $\Gamma, \Gamma_1, \cdots\cdots, \Gamma_\vartheta, \cdots\cdots$ ト直交スル.
故ニ T ト直交スル。

$$\therefore \quad T = \bar{E} \text{ ナラバ } x_0 = 0$$

A ハ *totale* ニナル。

（E ガ *complet* デ *séparable* ナルトキハ勿論 T ハ一次弱閉被デヨイ）

$M \subseteqq E$ ト $A \subseteqq \bar{E}$ トガ *biorthogonale*
即チ $M = \{a\}$ $\quad A = \{f_a\}$ $\quad f_a(a) \neq 0$ $\quad f_a(a') = 0$ $(a \neq a')$ トスル。

（定理 2） A ヲ *totale* トスル.

M ガ E デ *fondamentale* デアルタメノ必充条件ハ

$$\prod_{f_a \subset A} T[A - f_a] = 0$$

コヽニ $T[A-f_a]$ ハ $A-f_a$ ノ超限閉被トスル。

(證 明) Mが *fondamentale* トスル.

$f \subset T[A-f_a]$ トスレバ $f(a)=0$

∴ $f_0 \subset \prod\limits_{f_a \subset A} T[A-f_a]$ トスレバ

Mノ任意ノ要素 $a$ ニ對シ $f_0(a)=0$ ∴ $f_0=0$

∴ $\Pi=0$

逆ニ $\Pi=0$ トシテ、$f_0 \subset \bar{E}$ ガ M ノ全テノ $a$ ニ對シ

$f_0(a)=0$ トスル。

$f_0 \overline{\subset} T[\Gamma-f_a]$ ナラバ

$f_0(b) \neq 0$ $f_{a'}(b)=0$ $(a' \neq a)$ ナル $b \subset E$ アリ。

$f_a(a) \neq 0$ ナル故 $f_a(b)=\lambda f_a(a)$ トスル。

Aノ任意ノ要素 $f_{a''}$ ニツキ $f_{a''}(b-\lambda a)=0$

∴ $b=\lambda a$

$f_0(b)=\lambda f_0(a)=0$ 之ハ不合理

∴ $f_0 \subset T[\Gamma-f_a]$ $f_0 \subset \Pi$, ∴ $f_0=0$

∴ Mハ *fondamentale* トナル。

*同様ニ Mヲ *fondamentale* トスルト

Aガ *totale* デアルタメノ必充條件ハ

$$\prod_{a \subset M} [M-a]=0$$

コヽニ $[M-a]$ ハ $M-a$ ノ一次閉被トスル.